На правах рукописи

Аль-Делфи Джавад Кадим Кхалаф

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫРОЖДЕННЫХ ГОЛОМОРФНЫХ ГРУПП В КВАЗИБАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

ВОРОНЕЖ – 2015

Работа выполнена в ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет» (национальный исследовательский университет).

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,
доцент Келлер Алевтина Викторовна.

Официальные оппоненты:

Мухамадиев Эргашбой Мирзоевич, доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент АН Республики Таджикистан, Вологодский государственный университет,
кафедра информационных систем и технологий, профессор

Корнев Сергей Викторович, кандидат физико-математических наук, доцент, Воронежский государственный педагогический университет, кафедра высшей математики, доцент.

Ведущая организация:

Югорский государственный университет (г. Ханты-Мансийск).

Защита состоится 2 июня 2015 года в 16.30 часов на заседании диссертационного совета Д 212.038.22 при Воронежском государственном университете, по адресу: 394006, г. Воронеж, Университетская пл., 1, ауд. 335.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Воронежского государственного университета, а также на сайте
http://www.science.vsu.ru/disserinfo&cand=2749.

Автореферат разослан « » марта 2015 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физ.-мат. наук, профессор Ю.Е. Гликлих

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Постановка задачи.

Отображение $U^\bullet \in C(\mathbb{R}; \mathcal{L}(\mathfrak{U}))$ назовем *группой операторов*, если

$$U^s U^t = U^{s+t},$$

при всех $s, t \in \mathbb{R}$. Обычно группу операторов отождествляют с ее графиком $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$. Группу $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$ назовем *голоморфной*, если она аналитична во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Голоморфная группа $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$ называется *вырожденной*, если ее единица U^0 является проектором в $\mathfrak{U}$.

Будем исследовать разрешающие группы линейного оператора дифференциального уравнения вида

$$L\dot{u} = Mu,$$

где вектор-функцию $u \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathfrak{U})$ будем называть решением этого уравнения, если при подстановке она обращает его в тождество.

Пусть $\mathfrak{U}$ — некоторый вещественный линеал; назовем упорядоченную пару $(\mathfrak{U};\ {}_{\mathfrak{U}}\|\cdot\|)$ *квазинормированным пространством*, если

(i) $\forall u \in \mathfrak{U}\ {}_{\mathfrak{U}}\|u\| \geq 0$, причем ${}_{\mathfrak{U}}\|u\| = 0 \ \Leftrightarrow\ u = \mathbf{0}$, где $\mathbf{0} \in \mathfrak{U}$;

(ii) $\forall u \in \mathfrak{U}\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\ {}_{\mathfrak{U}}\|\alpha u\| = |\alpha|_{\mathfrak{U}}\|u\|$;

(iii) $\forall u, v \in \mathfrak{U}\ {}_{\mathfrak{U}}\|u+v\| \leq C({}_{\mathfrak{U}}\|u\| + {}_{\mathfrak{U}}\|v\|)$, где константа $C \geq 1$ и не зависит ни от u, ни от v.

Функция ${}_{\mathfrak{U}}\|\cdot\| : \mathfrak{U} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ называется *квазинормой* в случае $C \geq 1$, а в случае $C = 1$ еще и нормой. Таким образом, понятия квазинормированного пространства является обобщением понятия нормированного пространства. В дальнейшем квазинормированное пространство $(\mathfrak{U};\ {}_{\mathfrak{U}}\|\cdot\|)$ будем отождествлять с линеалом $\mathfrak{U}$.

В работе Й. Берга и Й. Лефстрема доказан следующий результат:[1]

Лемма 1 (лемма 3.10.1) *Пусть $\mathfrak{U}$ – квазинормированное пространство и пусть число α определяется уравнением $(2C)^\alpha = 2$. Тогда на $\mathfrak{U}$ существует метрика $d : \mathfrak{U} \times \mathfrak{U} \to \mathbb{R}$ такая, что при всех $u \in \mathfrak{U}$*

$$d(\mathbf{0}, u) \leq {}_{\mathfrak{U}}\|u\|^\alpha \leq 2d(\mathbf{0}, u).$$

[1] *Берг, Й.* Интерполяционные пространства. Введение / Й. Берг, Й. Лефстрем. — М.: Мир, 1980.

В силу этой леммы вводится понятие *фундаментальной последовательности* $\{u_k\} \subset \mathfrak{U}$ в квазибанаховых пространствах: $\lim\limits_{k,l\to\infty} {}_{\mathfrak{U}}\|u_k - u_l\| = 0$. Полное квазинормированное пространство называется *квазибанаховым*. Предел $\{u_k\} \in \mathfrak{U}$ сходящейся в квазибанаховом пространстве $\mathfrak{U}$ последовательности $\{u_k\} \subset \mathfrak{U}$ будем обозначать символом $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = u$.

Наиболее распространенным примером квазибанаховых пространств служат пространства последовательностей ℓ_q, $q \in \mathbb{R}_+$. Эти пространства банаховы при $q \in [1, +\infty)$ и квазибанаховы при $q \in (0, 1)$. Во втором случае $C = 2^{1/q}$.

Известно, что в общем случае в квазибанаховых пространствах не могут быть построены отображения, отличные от нулевого и тождественного[2], например, в пространстве $L_p[a, b]$, $0 < p < 1$. Вместе с тем, это справедливо не для всех квазибанаховых пространств. Так, в пространствах последовательностей ℓ_q, $0 < q < 1$ и построенных на их основе квазисоболевых пространствах ℓ_q^m, $0 < q < 1$, $m \in \mathbb{R}$ существуют линейные отображения, отличные от тривиальных. Подчеркнем, что в данном диссертационном исследовании рассматриваются только такие квазибанаховы пространства, которые в дальнейшем будем называть *квазибанаховыми пространствами последовательностей*.

Целью работы является развитие теории вырожденных голоморфных групп в квазибанаховых пространствах последовательностей с исследованием ее приложений к операторно-дифференциальным уравнениям первого порядка. Для достижения этой цели необходимо решить следующие **задачи**:

1. Обобщить результаты спектральной теории операторов в квазибанаховы пространства последовательностей.

2. Исследовать относительно ограниченные операторы в квазибанаховых пространствах последовательностей с получением результатов об их свойствах.

3. Обобщить результаты теории вырожденных голоморфных групп в квазибанаховы пространства последовательностей.

4. Исследовать разрешимость задачи Коши, задачи Шоуолтера–Сидорова, начально-конечной задачи для уравнений соболевского типа с использованием теории вырожденных голоморфных групп в квазибанаховых пространствах последовательностей.

Актуальность темы. В классической теории разрешающих семейств операторов в банаховых пространствах можно выделить три основных случая, ко-

[2] *Rolewicz, S.* Metric Linear Spaces / S. Rolewicz. — Warsaw: PWN, 1985.

гда семейство является: 1) полугруппой сильно непрерывных операторов; 2) полугруппой голоморфных операторов; 3) группой голоморфных операторов. Развитие теории разрешающих полугрупп неразрывно связано с исследованием решений операторно–дифференциальных уравнений в банаховых пространствах.

Исследованием таких семейств с использованием операторной теории занимались и занимаются во многих российских научных центрах, например, таких как Воронежская, Новосибирская, Екатеринбургская, Иркутская школы.

Исследования вырожденных голоморфных групп операторов неразрывно связаны с развитием теории уравнений, неразрешенных относительно производной. Впервые такие уравнения начал изучать А. Пуанкаре, однако систематическое их изучение началось в середине прошлого века после основополагающих работ С.Л. Соболева. Именно поэтому в современных математических исследованиях в отношении уравнений неразрешенных относительно производной прочно закрепился термин "уравнения соболевского типа".

При этом исследователями было замечено, что характерной чертой группы уравнения с вырожденным оператором является то, что единицей группы является не тождественный оператор, как в классической теории групп операторов, а проектор на некоторое подпространство. Именно такие группы назовем вырожденными.

Ныне, вырожденные голоморфные группы операторов и уравнения соболевского типа активно изучаемые области функционального анализа и неклассических уравнений математической физики соответственно. В проблематике вырожденных голоморфных групп операторов активно работают Р.Е. Шоуолтер (R.E. Showalter), А. Фавини[3] (A. Favini), А. Яги (A. Yagi), И.В. Мельникова, С.Г. Пятков, Г.А. Свиридюк[4], Т.Г. Сукачева, В.Е. Федоров. Термин "голоморфные разрешающие группы" ввел Р.Е. Шоуолтер в 1975 г. Голоморфные вырожденные группы операторов как разрешающие группы линейных уравнений соболевского типа были изучены Г.А. Свиридюком.

Понятие квазибанаховых пространств, по всей видимости, неразрывно связано с понятием банаховых пространств. Однако самостоятельный интерес к

[3] *Favini, A.* Degenerate differential equation in Banach spaces / A. Favini, A. Yagi. — New York etc.: Marcel Dekker Inc. — 1999.

[4] *Sviridyuk, G.A.* Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht, Boston: VSP, 2003.

квазибанаховым пространствам, как к объекту исследования, появился сравнительно недавно, примером этого могут служить работы Н. Кэлтона[5] (N. Kalton), кроме того, такие пространства возникают при исследовании абелевых групп Й. Берга, Й. Лефстрема и прикладных задач, например, работы С.Я. Новикова[6] и Дж.Д. Хардке[7] (J.D. Hardtke).

Отметим, что квазинормируемые пространства являются как самостоятельным объектом теоретических исследований например в работах А.Б. Александрова[8], В.Л. Крепкогорского[9], так и используются в решении прикладных задач, например работа С.М. Вовка и В.Ф. Борулько[10].

Научная новизна заключается в полученных результатах:

1. Построена спектральная теория операторов в квазибанаховых пространствах последовательностей.

2. Построена теория относительно ограниченных операторов в квазибанаховых пространствах последовательностей. Построены относительные резольвенты, рассмотрены их свойства, построены относительно присоединенные векторы. Доказана теорема о расщеплении действия операторов в квазибанаховых пространствах последовательностей в относительно ограниченном случае.

3. Доказана теорема о существовании голоморфных разрешающих вырожденных групп операторов в квазибанаховых пространствах последовательностей, а также исследованы свойства порождающих операторов для этих групп.

4. Получены результаты теории голоморфных вырожденных групп операторов применены к исследованию разрешимости начальных и начально-конечной

[5] *Kalton, N.* Quasi-Banach Spaces / N. Kalton // Handbook of the Geometry of Banach Spaces, Vol. 2, Edit. by W.B. Johnson and J. Lindenstrauss. – Amsterdam etc.: Elsevier, 2003. — P. 1099–1130.

[6] *Новиков, С.Я.* Об особенностях оператора вложения симметричных функциональных прространств на $[0, 1]$ / С.Я. Новиков // Математические заметки. — 1997. — Т. 62, вып. 4. — С. 549–563.

[7] *Hardtke, J.D.* A Remark on Condensation of Singularities / J.D. Hardtke // Journal of mathematical physics, analysis, Geometry. — 2013. — V. 9, № 4. — P. 448–454.

[8] *Александров, А.Б.* Квазиномированные пространства в комплексном анализе: дис. ... док. физ-мат. наук / А.Б. Александров. – Ленинград, 1983.

[9] *Крепкогорский, В.Л.* Квазиномированные пространства функций, рационально аппроксимируемых в норме BMO / В.Л. Крепкогорский // Известия высших учебных заведений. Математика. — 1990. — № 3.— С. 38–44.

[10] *Вовк, С.М.* Постановка задач определения линейных параметров сигналов в квазиномированных пространствах / С.М. Вовк, В.Ф. Борулько // Известия высших учебных заведений. Радиоэлектроника. — 2010. — Т. 53, № 7. — С. 31–42.

задач для одного класса вырожденных операторных уравнений.

5. В работе построен квазиоператор Лапласа и рассмотрены квазисоболевы пространства для рассмотрения аналога известного неклассического уравнения математической физики — уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной — в квазибанаховых пространствах последовательностей.

Методы исследования. В данной работе для построения теории вырожденных голоморфных групп операторов в квазибанаховых пространствах последовательностей используются классические методы функционального анализа, теории линейных ограниченных операторов, спектральной теории. Для построения операторов разрешающих групп, по аналогии с классическими результатами, используется преобразование Лапласа оператор-значных функций в квазибанаховых пространствах последовательностей, для чего необходимо обоснование существования в квазибанаховых пространствах последовательностей аналитичности отображения и интегрирования для таких отображений. В основе этого обоснования лежит метризуемость квазибанаховых пространств.

Теоретическая и практическая значимость. Теоретическая значимость исследования заключается в развитии теории вырожденных голоморфных групп операторов, получении ряда обобщающих результатов в квазибанаховых пространствах последовательностей. Это исследование становится отправной точкой для развития теории вырожденных голоморфных полугрупп операторов. Кроме того, получение теоретической базы позволяет не только начать исследования неклассических уравнений в квазибанаховых пространств и различных задач для такого рода уравнений, но и рассматривать возможность более эффективного решения ряда технических задач. Именно возможность приложения полученных теоретических результатов к различным областям научных исследований позволяет говорить о практической значимости исследования. В диссертации приведены лишь отдельные примеры такого рода приложений.

Апробация работы. Результаты работы апробированы на конференциях: Международной научной конференции "Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений" (Новосибирск, 2013), Зимней воронежской математической школе (Воронеж, 2014), Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 2014), Всероссийской научной конференции "Алгоритмический анализ неустойчивых задач" (Челябинск, 2014), Ежегодных конференциях аспирантов

и докторантов ЮУрГУ (Челябинск, 2013, 2014, 2015). Результаты неоднократно докладывались на областном семинаре по уравнениям соболевского типа профессора Г.А. Свиридюка.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в работах [1 – 9]. Работы [1 – 4] опубликованы в журналах из перечня ведущих российских рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ. Из совместных работ [3,4,6,8] в диссертацию вошли только результаты, полученные ее автором.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Объем диссертации составляет 98 страниц. Список литературы содержит 112 наименований.

Краткое содержание диссертации

Во **введении** приводится постановка задачи, ставится цель исследования, описываются методы исследования и обосновывается актуальность, теоретическая и практическая значимость проведенного исследования.

Первая глава состоит из четырех параграфов. Они содержат определения, теоремы и вспомогательные утверждения, опираясь на которые получены основные результаты исследования.

В **п. 1.1** приводятся понятие и примеры квазибанаховых пространств последовательностей, квазисоболевых пространств, теорема о вложении.

В **п. 1.2** содержатся основные понятия об операторах в квазибанаховых пространствах последовательностей. Пусть $\mathfrak{U} = (\mathfrak{U};\ {}_{\mathfrak{U}}\|\cdot\|)$ и $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F};\ {}_{\mathfrak{F}}\|\cdot\|)$ — квазибанаховы пространства последовательностей. Линейный оператор $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ отображающий пространство $\mathfrak{U}$ в пространство $\mathfrak{F}$ называется *непрерывным*, если $\lim\limits_{k\to\infty} Lu_k = L\Big(\lim\limits_{k\to\infty} u_k\Big)$ для любой сходящейся в $\mathfrak{U}$ последовательности $\{u_k\} \subset \mathfrak{U}$ и *ограниченным*, если при любом $u \in \mathfrak{U}$

$$ {}_{\mathfrak{F}}\|Lu\| \leq K\ {}_{\mathfrak{U}}\|u\|, $$

где $K \in \mathbb{R}_+$ не зависит от u.

Теорема 1. (1.2.1)[11] *Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – квазибанаховы пространства последовательностей. Линейный оператор $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ такой, что* $\operatorname{dom} L = \mathfrak{U}$, *непрерывен точно тогда, когда он ограничен.*

[11] В скобках указана нумерация в диссертации.

Теорема 2. (1.2.2) *Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — квазибанаховы пространства последовательностей, тогда биективный оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ — топлинейный изоморфизм.*

В **п. 1.3** рассматривается пространства линейных ограниченных операторов в квазибанаховых пространствах последовательностей. Множество всех линейных $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ ограниченных операторов, отображающий пространство $\mathfrak{U}$ в пространство $\mathfrak{F}$, таких что $\operatorname{dom} L{=}\mathfrak{U}$ является линеалом, который обозначим символом $\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. На этом линеале определим неотрицательную функцию

$$_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})}\|L\| = \sup_{_{\mathfrak{U}}\|u\|=1} {}_{\mathfrak{F}}\|Lu\|.$$

Теорема 3. (1.3.1) *Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — квазибанаховы пространства последовательностей. Любой линейный непрерывный оператор $L : \operatorname{dom} L \to \mathfrak{F}$ с плотной областью определения ($\overline{\operatorname{dom} L} = \mathfrak{U}$) можно продолжить, и при том единственным образом, до линейного непрерывного оператора $\widetilde{L} : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$, определенного на всем*

Теорема 4. (1.3.2) *Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — квазибанаховы пространства последовательностей, тогда $\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ — квазибанахово пространство с квазинормой $_{\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})}\|\cdot\|$.*

В **п. 1.4** рассматриваются функции линейных ограниченных операторов в квазибанаховых пространствах последовательностей.

Теорема 5. (1.4.1) *Пусть $\mathfrak{F}$ — квазибанахово пространство последовательностей, оператор $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$ и $_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\|M\| < 1/C$. Тогда $T = \mathbb{I}_{\mathfrak{F}} - M$ непрерывно обратим и*

$$_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\|T^{-1}\| \le \frac{C}{1 - C\,_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\|M\|},$$

где C — константа из определения квазинормы.

Здесь вводятся понятия резольвентного множества, спектра линейного непрерывного оператора и резольвента этого оператора, представимая в виде ряда.

Приводится понятие аналитической функции в ограниченной области $D \subset \mathbb{C}$. Пусть вектор-функция $f(z)$ определена на D и принимает значения в квазибанаховом пространстве последовательностей $\mathfrak{F}$. Если вектор-функция представима сходящимся рядом Лорана в некоторой проколотой окрестности некоторой точки, то *вычетом* функции в этой точке назовем коэффициент c_{-1} лорановского разложения. Классификацию изолированных особых точек будем понимать

также, как в теории функций комплексного переменного. Интеграл от вектор-функции $f(z)$ по замкнутому гладкому контуру $\Gamma \subset \mathbb{C}$ будем понимать как сумму вычетов в изолированных особых точках, лежащих внутри контура Γ, умноженную на коэффициент $2\pi i$. Тогда ясно, что для аналитических вектор-функций справедлива классическая теорема Коши о равенстве нулю интеграла по замкнутому контуру.

Вторая глава состоит из пяти параграфов. В ней рассматриваются вырожденные голоморфные группы операторов в квазибанаховых пространствах последовательностей.

В **п. 2.1** построены относительные резольвенты в квазибанаховых пространствах последовательностей и исследованы их свойства. Будем называть множества

$$\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})\}, \quad \sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$$

L-резольвентным множеством и L-спектром оператора M соответственно.

Оператор-функции вида $(\mu L - M)^{-1}$, $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L$ и $L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ переменной $\mu \in \mathbb{C}$ называются соответственно *L-резольвентой, правой и левой L-резольвентой* оператора M.

Лемма 2. (2.1.1) *Множество $\rho^L(M)$ всегда открыто, и, следовательно, $\sigma^L(M)$ всегда замкнуто.*

Теорема 6. (2.1.1) *Пусть операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, тогда L-резольвенты, правая и левая L-резольвента оператора M голоморфны в $\rho^L(M)$.*

В **п. 2.2** введено понятие (L, p)-ограниченных операторов и доказана теорема о расщеплении действий операторов L, M. Оператор M называется *спектрально ограниченным* относительно оператора L (коротко, *(L, σ)-ограниченным*), если

$$\exists a \in \mathbb{R}_+ \ \forall \mu \in \mathbb{C} \ (|\mu| > a) \ \Rightarrow \ \big(\mu \in \rho^L(M)\big).$$

Пусть оператор M (L, σ)-ограничен, зададим проекторы

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma R^L_\mu(M) d\mu, \qquad Q = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma L^L_\mu(M) d\mu,$$

где контур $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : \ |\mu| = r > a\}$. Положим $\mathfrak{U}^0$ $(\mathfrak{U}^1) = \ker P$ $(\mathrm{im} P)$, $\mathfrak{F}^0$ $(\mathfrak{F}^1) = \ker Q$ $(\mathrm{im} Q)$, и через L_k (M_k) обозначим сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^k$, $k = 0, 1$. Пространства $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ расщепляются в прямые суммы $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$ и $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1$.

Теорема 7. (2.2.1) *Пусть оператор M (L,σ)-ограничен, тогда*
(i) *операторы $L_k, M_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k;\mathfrak{F}^k)$, $k=0,1$;*
(ii) *существуют операторы $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1;\mathfrak{U}^1)$ и $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0;\mathfrak{U}^0)$.*

Существуют операторы: $H = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$ и $S = L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1)$.

$$(\mu L - M)^{-1} = -\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k H^k M_0^{-1}(\mathbb{I}-Q) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{-k} S^{k-1} L_1^{-1} Q \quad \forall \mu \in \rho^L(M)$$

Оператор M называется (L,p)-*ограниченным* при $p \in \mathbb{N}_0 \equiv \{0\} \cup \mathbb{N}$, если он (L,σ)-ограничен и $p=0$, если $H \equiv \mathbb{O}$; $p \in \mathbb{N}$, если $H^p \neq \mathbb{O}$, а $H^{p+1} \equiv \mathbb{O}$.

В **п. 2.3** содержатся сведения об относительно присоединенных векторах и их свойствах. Пусть $\ker L \neq 0$, $\varphi_0 \in \ker L \backslash \{0\}$ собственный вектор оператора L. Упорядоченное множество $\{\varphi_k : k \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}$ назовем *цепочкой M-присоединенных векторов* собственного вектора φ_0, если

$$L\varphi_{k+1} = M\varphi_k,\ k \in \{0\} \cup \mathbb{N}; \quad \varphi_k \notin \ker L \backslash \{0\}, k \in \mathbb{N}.$$

Цепочка операторов может быть бесконечной, однако она обязательно конечна, если существует вектор $\varphi_q \in \{\varphi_k : k \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}$ такой, что $M\varphi_q \notin \operatorname{im} L$. Мощность конечной цепочки называется ее длиной.

Линейная оболочка всех собственных и M-присоединенных векторов оператора L называется *M-корневым линеалом* оператора L. Если линеал замкнут, то он называется *M-корневым пространством* оператора L.

Лемма 3. (2.3.1) *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тогда M-корневой линеал оператора L содержится в $\mathfrak{U}^0$.*

Теорема 8. (2.3.2) *Пусть оператор L фредгольмов. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*
(i) оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$;
(ii) длина любой цепочки M-присоединенных векторов оператора L не превышает p, и существует по крайней мере одна цепочка длины p.

В **п. 2.4** сформулировано и доказано существование разрешающей вырожденной голоморфной группы операторов для однородного уравнения соболевского типа.

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — квазибанаховы пространства, операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$.

$$L\dot{u} = Mu \tag{1}$$

Решением уравнения (1) называется вектор-функция $u \in C^\infty(\mathbb{R};\mathfrak{U})$, если она удовлетворяет этому уравнению. Назовем его *решением задачи Коши*, если оно дополнительно удовлетворяет условию

$$u(0) = u_0. \tag{2}$$

Группа $U^\bullet \in C^\infty(\mathbb{R};\mathcal{L}(\mathfrak{U}))$ называется *группой разрешающих операторов* уравнения (1), если при любом $u_0 \in \mathfrak{U}$ вектор-функция $u(t) = U^t u_0$ является решением уравнения (1).

Теорема 9. (2.4.1) *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тогда существует голоморфная группа разрешающих операторов для уравнения* (1), *которая к тому же имеет вид*

$$U^t = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma R^L_\mu(M) e^{\mu t} d\mu, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

где контур $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : \ |\mu| = r > a\}$.

Множество $\mathfrak{P}$ называется *фазовым пространством* уравнения (1), если
(i) при любом $u_0 \in \mathfrak{P}$ существует единственное решение задачи (1),(2);
(ii) любое решение $u = u(t)$ уравнения (1) лежит в $\mathfrak{P}$ как траектория (т.е. $u(t) \in \mathfrak{P}$ при всех $t \in \mathbb{R}$).

Теорема 10. (2.4.2) *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тогда фазовым пространством уравнения* (1) *является подпространство $\mathfrak{U}^1$.*

Следствие 1. (2.4.3) *Группа $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$ будет единственной разрешающей группой уравнения* (1), *если*
(i) вектор функция $u(t) = U^t u_0$ является решением (1) *при любом $u_0 \in \mathfrak{U}$;*
(ii) образ группы (3) *совпадает с фазовым пространством уравнения* (1).

В **п. 2.5** этой главы содержатся результаты о свойствах операторов, порождающих вырожденную голоморфную группу.

Третья глава состоит из пяти параграфов и содержит приложения полученных теоретических результатов.

В **п. 3.1** рассмотрена задача Коши для неоднородного уравнения соболевского типа с относительно ограниченным оператором в квазибанаховых пространствах последовательностей. Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — квазибанаховы пространства последовательностей, операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, отрезок $[a,b] \subset \mathbb{R}$ содержит точку нуль, вектор-функция $f \in C^\infty([a,b];\mathfrak{F})$. Рассмотрим линейное неоднород-

ное уравнение соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + f. \tag{4}$$

Теорема 11. (3.1.1) *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p\in\{0\}\cup\mathbb{N}$, точка $0 \in [a,b]$. Тогда при любых $f \in C^\infty([a,b];\mathfrak{F})$ и любых*

$$u_0 \in \left\{ u \in \mathfrak{U} : u = -\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q) f^{(k)}(0) \right\},$$

существует единственное решение $u \in C^\infty([a,b];\mathfrak{U})$ задачи (2), (4) вида

$$u(t) = -\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q) f^{(k)}(t) + U^t u_0 + \int\limits_0^t U^{t-s} L_1^{-1} Q f(s) ds.$$

В **п. 3.2** строится решение задачи Шоуолтера–Сидорова

$$[R_\alpha^L(M)]^{p+1}(u(0) - u_0) = 0, \qquad \alpha \in \rho^L(M). \tag{5}$$

для неоднородного уравнения соболевского типа (4).

Теорема 12. (3.2.1) *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\}\cup\mathbb{N}$, точка $0 \in [a,b]$. Тогда при любых $f \in C^{p+1}([a,b];\mathfrak{F})$ и любых $u_0 \in \mathfrak{U}$ существует единственное решение $u = u(t)$, $t \in [a,b]$, задачи (4), (5) вида*

$$u(t) = -\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q) f^{(k)}(t) + U^t u_0 + \int\limits_0^t U^{t-s} L_1^{-1} Q f(s) ds.$$

В случае (L,p)-ограниченности, $p \in \{0\}\cup\mathbb{N}$, оператора M начальное условие (5) эквивалентно условию $P(u(0) - u_0) = 0$.

В **п. 3.3** рассматривается начально-конечная задача для неоднородного уравнения соболевского типа (4). Пусть L-спектр $\sigma^L(M)$ оператора M распадается на две непересекающиеся компоненты, т.е. выполнено условие

$$\sigma^L(M) = \sigma_a^L(M) \cup \sigma_b^L(M) \quad \text{и} \quad \sigma_a^L(M) \cap \sigma_b^L(M) = \emptyset. \tag{6}$$

Тогда существуют непересекающиеся контуры γ_a и γ_b, ограничивающие области, содержащие части спектра $\sigma_a^L(M)$ и $\sigma_b^L(M)$ и в квазибанаховых пространствах последовательностей можно построить спектральные проекторы

$$P_{a(b)} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{a(b)}} R_\mu^L(M)\, d\mu \qquad \text{и} \qquad Q_{a(b)} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{a(b)}} L_\mu^L(M)\, d\mu.$$

При выполнении условия (6) для уравнения (4) рассматривается начально-конечная задача

$$P_a(u(a) - u_a) = 0, \qquad P_b(u(b) - u_b) = 0. \tag{7}$$

Теорема 13. (3.3.1) *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, и выполнено условие* (6). *Тогда для любых векторов $u_a, u_b \in \mathfrak{U}$ и любой вектор-функции $f : [a,b] \to \mathfrak{F}$, удовлетворяющей условиям*

$$(\mathbb{I} - Q)f \in C^{p+1}([a,b];\mathfrak{F}^0) \quad \text{и} \quad Qf \in C([a,b];\mathfrak{F}^1),$$

существует единственное решение $u \in C^1([a,b];\mathfrak{U})$ задачи (4), (7) *вида*

$$u(t) = -\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q)f^{(k)}(t) + U^{t-a}u_a - U^{b-t}u_b +$$

$$+ \int_a^t U^{t-s}L_1^{-1}Q_a f(s)ds - \int_t^b U^{t-s}L_1^{-1}Q_b f(s)ds.$$

В **п. 3.4** построен квазиоператор Лапласа и рассмотрены квазисоболевы пространства. Пусть $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$ — монотонно возрастающая последовательность такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty$. Введем в рассмотрение квазисоболевы пространства

$$\ell_p^m = \left\{ u = \{u_k\} \subset \mathbb{R} : \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^{\frac{m}{2}} |u_k|\right)^p < +\infty \right\},$$

где $m \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}_+$. Пространства ℓ_p^m квазибанаховы при всех $m \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}_+$ с квазинормой

$${}_p^m\|u\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^{\frac{m}{2}} |u_k|\right)^p \right)^{1/p},$$

причем они также банаховы при $p \in [1, +\infty)$. Если $p \in (0,1)$, то константа $C = 2^{1/p}$. Заметим еще, что если $m = 0$, то $\ell_p^0 = \ell_p$.

Теорема 14. (3.4.1) *При всех $p \in \mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{R}$, $l \le m$, имеют место плотные и непрерывные вложения $\ell_p^m \hookrightarrow \ell_p^l$.*

В **п. 3.5** рассматривается аналог уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной в квазисоболевых пространствах на основе построенного в четвертом параграфе квазиоператора Лапласа. Пусть, как и выше, последовательность $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$ такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty$. Введем в рассмотрение квазиоператор Лапласа $\Lambda : \ell_p^{m+2} \to \ell_p^m$ с помощью формулы: $\Lambda u = \lambda_k u_k$.

Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ — некоторые константы. Рассмотрим неоднородного уравнение Баренблатта–Желтова–Кочиной

$$(\lambda - \Lambda)u_t = \alpha\Lambda u + f.$$

Теорема 15. (3.5.1) *Для любых* $\lambda \in \mathbb{R}$ *и* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *оператор* M $(L, 0)$-*ограничен.*

L-спектр $\sigma^L(M)$ оператора M содержит точки

$$\left\{\mu_k = \frac{\alpha\lambda_k}{\lambda - \lambda_k},\ k \in \mathbb{N} \setminus \{l : \lambda = \lambda_l\}\right\}.$$

Получен результат о разрешимости начальных и начально-конечной задач для уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной.

Результаты выносимые на защиту:

1. Результаты спектральной теории операторов в квазибанаховых пространствах последовательностей.
2. Результаты теории относительно ограниченных операторов в квазибанаховых пространствах последовательностей.
3. Теоремы о существовании голоморфных вырожденных групп операторов в квазибанаховых пространствах последовательностей.
4. Теоремы о разрешимости задач Коши, Шоуолтера–Сидорова и начально-конечной задачи для неоднородного уравнений соболевского типа в квазибанаховых пространствах последовательностей.
5. Построение квазиоператора Лапласа и квазисоболевых пространств.
6. Построение аналога уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной в квазисоболевых пространствах.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Аль-Делфи, Дж.К.* Квазисоболевы пространства ℓ_p^m / Дж.К. Аль-Делфи // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2013. – Т. 5, № 1. – С. 107–109.

2. *Аль-Делфи, Дж.К.* Квазиоператор Лапласа в квазисоболевых пространствах / Дж.К. Аль-Делфи // Вестник СамГТУ. Серия физ.-мат. науки. — 2013. — № 2 (13). — С. 13–16.

3. *Свиридюк, Г.А.* Теорема о расщеплении в квазибанаховых пространствах / Г.А. Свиридюк, Дж.К. Аль-Делфи // Математические заметки СВФУ. — 2013. — Т. 20, № 2. — С. 180–185.

4. *Келлер, А.В.* Голоморфные вырожденные группы операторов в квазибанаховых пространствах / А.В. Келлер, Дж.К. Аль-Делфи // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2015. – Т. 7, № 1. – С. 20–27.

5. *Al-Delfi, J.K.* Quasi-Banach Space for the Sequence Space l_p, where $0<p<1$ / J.K. Al-Delfi // Journal of College of Education, Al-Mustansiriyah University (Iraq–Baghdad). Mathematics. — 2007. — № 3. — P. 285–295.

6. *Свиридюк, Г.А.* Квазиоператор Лапласа в квазисоболевых пространствах / Г.А. Свиридюк, Дж.К. Аль-Делфи // Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений. Международ. конф.; Мин-во образования и науки РФ; Новосиб. гос. ун-т. — Новосибиск, 2013. — С. 247.

7. *Аль-Делфи, Дж.К.* Модель Баренблатта–Желтова–Кочной с условием Коши в квазибанаховых пространствах / Дж.К. Аль-Делфи // Материалы международ. конф. Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна-2014. — Воронеж, 2014. — С. 14–17.

8. *Аль-Делфи, Дж.К.* Уравнение Баренблатта-Желтова-Кочиной с условием Шоуолтера–Сидорова в квазибанаховых пространствах / Дж.К. Аль-Делфи, Г.А. Свиридюк // Международн. конф. по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Суздаль, Россия, 4 – 9 июля 2014 г.: тез. докл. — М: МИАН, 2014. — С. 153–154.

9. *Аль-Делфи, Дж.К.* Задача Шоуолтера–Сидорова в квазибанаховых пространствах / Дж.К. Аль-Делфи // Алгоритмический анализ неустойчивых задач: Тез. докл. Всеросс. научн. конф. — Челябинск, 2014. — С. 180–181.

Работы [1 – 4] опубликованы в журналах из перечня ведущих российских рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ.